

Mise en oeuvre des méthodes Electre

Logiciels Electre

Vincent Mousseau

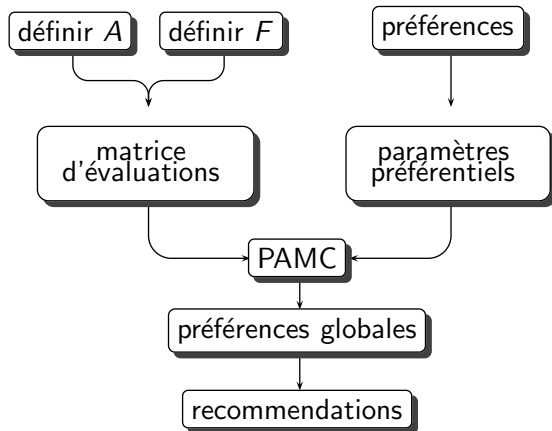
Ecole Centrale Paris,
vincent.mousseau@ecp.fr

February 3, 2009

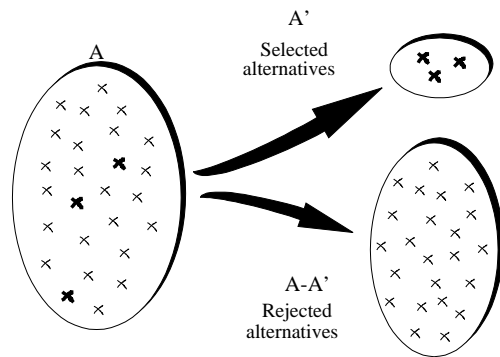
- 1 Introduction
- 2 Exemple illustratif : Procédure d'admission
- 3 Étape 1 : utilisation d'Electre Tri
- 4 Étape 2 : utilisation d'Electre IS
- 5 Étape 3 : utilisation d'Electre III

- 1 Introduction
- 2 Exemple illustratif : Procédure d'admission
- 3 Étape 1 : utilisation d'Electre Tri
- 4 Étape 2 : utilisation d'Electre IS
- 5 Étape 3 : utilisation d'Electre III

Processus d'aide à la décision

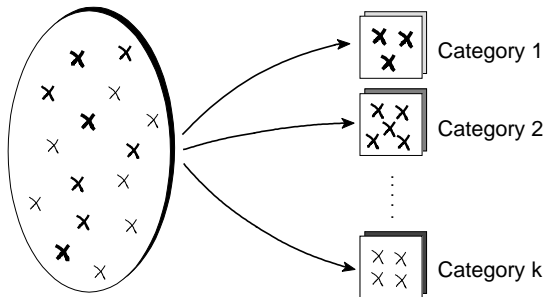


Problématiques de décision



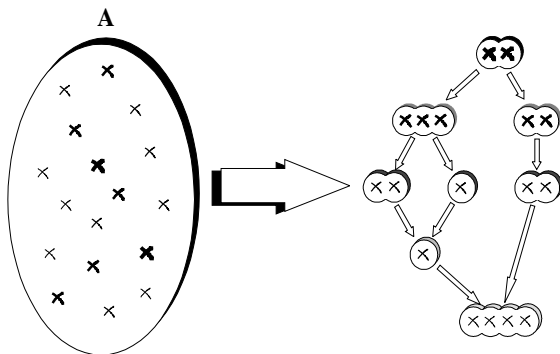
P_α : Problématique du choix \rightarrow Electre IS

Problématiques de décision



P_β : Problématique du Tri \rightarrow Electre Tri

Problématiques d'aide à la décision



P_γ : Problématique du classement \rightarrow Electre III et IV

- 1 Introduction
- 2 Exemple illustratif : Procédure d'admission
- 3 Étape 1 : utilisation d'Electre Tri
- 4 Étape 2 : utilisation d'Electre IS
- 5 Étape 3 : utilisation d'Electre III

Exemple illustratif : Procédure d'admission

- Recrutement dans une formation d'enseignement supérieur,
- nombre de places limité ($30 \ll$ nombre de candidats),
- chaque année une centaine de candidats (\pm) se présentent,
- la procédure de sélection s'effectue sur dossier,
- le dossier des candidats contient :
 - l'état civil du candidat,
 - le dossier scolaire + cursus,
 - 20 items concernant le "*profil psychologique*".

Procédure d'admission

- soit A l'ensemble des candidats pour une année,
- La procédure de sélection procède en trois étapes :
 - 1 Partition de A en sous-ensembles → **Electre Tri**
 - A_3 : candidats acceptés sur dossier,
 - A_2 : candidats potentiellement intéressants,
 - A_1 : candidats refusés (sauf pour les meilleurs),
 - 2 Identification des meilleurs candidats refusés ($A'_1 \subset A_1$) à l'étape 1 → **Electre IS**,
 - les candidats de A'_1 seront traités comme ceux de A_2 par la suite,
 - 3 Classer les candidats de $A_2 \cup A'_1$ pour former une liste d'attente → **Electre III**.

Famille de critères F

La même famille de 9 critères F est utilisée pour les 3 étapes

- Dossier scolaire :

g_1 : Type de baccalauréat (qualitatif : 0-4),

g_2 : Note en Mathématiques [0,20],

g_3 : Note en Langue vivante 1 [0,20],

g_4 : Note en Français [0,20],

g_5 : Appréciation du livret scolaire (qualitatif : 0-4),

- Identification :

g_6 : Age : (<20) \succ ($20-22$) \succ (>22),

g_7 : Zone de résidence (3 zones),

- Profil psychologique :

g_8 : Motivation (qualitatif : 0-3),

g_9 : Personnalité (qualitatif : 0-3),

A : ensemble des 90 candidats

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
a_1	4	15	10	8	3	2	2	3	2
a_2	3	10.5	7	9	3	3	3	1	3
a_3	2	5	11	12	2	3	2	2	3
a_4	2	6	7	6	2	3	2	3	1
a_5	3	16	15	17	4	3	3	1	1
a_6	1	8	9	15	3	3	3	2	3
a_7	3	5	7	9.5	1	3	3	3	3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
a_{88}	4	11	10	10	3	1	0	4	2
a_{89}	2	8	0	11.5	2	2	3	1	3
a_{90}	3	12	11.5	13	3	3	3	2	3

- 1 Introduction
- 2 Exemple illustratif : Procédure d'admission
- 3 **Étape 1 : utilisation d'Electre Tri**
- 4 Étape 2 : utilisation d'Electre IS
- 5 Étape 3 : utilisation d'Electre III

Étape 1 : Partition de A en A_1 , A_2 et A_3

- Paramètres préférentiels de la méthode Electre Tri :
 - Limites des catégories b_1 (A_1 - A_2) et b_2 (A_2 - A_3),

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
$g_j(b_1)$	2	8	8	8	2	1	2	2	2
$g_j(b_2)$	3	13	11	12	3	2	3	3	3

- seuils de discrimination ($p_j(b_h)$, $q_j(b_h)$),

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
$q_j(b_1)$	0	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0	0
$p_j(b_1)$	0	1	1	1	0	0	0	0	0
$q_j(b_2)$	1	1	1	1	0	0	0	0	0
$p_j(b_2)$	1	3	3	3	0	0	0	0	0

Étape 1 : Partition de A en A_1 , A_2 et A_3

- Paramètres préférentiels de la méthode Electre Tri :
 - seuils de veto

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
$v_j(b_1)$	5	10	10	10	4	3	3	4	3
$v_j(b_2)$	5	10	10	10	4	3	3	4	3

Détails de l'affectation du candidat a_1

- indices de concordance partiels $c_j(a_1, b_h)$,

$$c_j(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(a) \geq g_j(b) - q_j \\ 0 & \text{si } g_j(a) \leq g_j(b) - p_j \\ \frac{p_j - (g_j(a) - g_j(b))}{p_j - q_j} & \text{si } \text{sinon} \end{cases}$$

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
$c_j(a_1, b_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$c_j(a_1, b_2)$	0	0	0	1	0	0	1	0	1
$c_j(b_1, a_1)$	1	1	1	0	1	1	0	1	0
$c_j(b_2, a_1)$	1	0.5	1	1	1	1	1	1	1

Détails de l'affectation du candidat a_1

- indice de concordance globale $c(a_1, b_h)$,

$$C(a, b) = \sum_{j=1}^p w_j c_j(a, b)$$

avec w_j le poids associé au critère g_j , $\sum_{j=1}^p w_j = 1$ $c(a_1, b_1) = 1$,
 $c(b_1, a_1) = 0.294$,
 $c(a_1, b_2) = 0.706$ et $c(b_2, a_1) = 0.912$,

Détails de l'affectation du candidat a_1

- indices de discordance $d_j(a_1, b_h)$,
 - $d_j(a, b) = 0$ si g_j ne s'oppose pas à aSb ,
 - $d_j(a, b) = 1$ si g_j s'oppose totalement à aSb ,
 - $d_j(a, b) \in]0, 1[$ si g_j s'oppose en partie à aSb ,

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
$d_j(a_1, b_1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$d_j(a_1, b_2)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$d_j(b_1, a_1)$	0	0.77	0	0	0	0	0	0	0
$d_j(b_2, a_1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- indice de crédibilité du surclassement ($\lambda=0.75$)
 - $\sigma(a_1, b_1) = 1$, $\sigma(b_1, a_1) = 0.112$,
 - $\sigma(a_1, b_2) = 0.706$ et $\sigma(b_2, a_1) = 0.912$,

Détails de l'affectation du candidat a_1

- comparaison de a_1 aux profils frontière
 - $a_1 S b_0$ et non $b_0 S a_1 \Rightarrow a_1 \succ b_0$,
 - $a_1 S b_1$ et non $b_1 S a_1 \Rightarrow a_1 \succ b_1$,
 - non $a_1 S b_2$ et $b_2 S a_1 \Rightarrow a_1 \prec b_2$,
 - non $a_1 S b_3$ et $b_3 S a_1 \Rightarrow a_1 \prec b_3$,

- affectation pessimiste,
 - a) comparer a successivement à b_i , pour $i=p, p-1, \dots, 0$,
 - b) soit b_h le premier profil tel que $a S b_h$,
affecter a à la catégorie C_{h+1} . $a_1 \rightarrow_{pes} C_2$

- affectation optimiste,
 - a) comparer a successivement à b_i , $i=1, 2, \dots, p+1$,
 - b) soit b_h le premier profil tel que $b_h \succ a$,
affecter a à la catégorie C_h . $a_1 \rightarrow_{opt} C_2$

Résultats de l'étape 1

Affectation pessimiste:

$$A_3 = \{a_5, a_{10}, a_{17}, a_{19}, a_{20}, a_{21}, a_{24}, a_{27}, a_{30}, a_{35}, a_{36}, a_{42}, a_{31}, a_{46}, a_{50}, a_{51}, a_{58}, a_{59}, a_{63}, a_{64}, a_{68}, a_{73}, a_{78}, a_{80}, a_{81}, a_{85}, a_{90}\}$$

→ 27 acceptés

$$A_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_6, a_8, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{16}, a_{18}, a_{23}, a_{26}, a_{28}, a_{29}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{37}, a_{38}, a_{39}, a_{41}, a_{43}, a_{44}, a_{45}, a_{49}, a_{53}, a_{54}, a_{55}, a_{56}, a_{57}, a_{60}, a_{61}, a_{65}, a_{67}, a_{69}, a_{70}, a_{71}, a_{72}, a_{74}, a_{76}, a_{77}, a_{79}, a_{82}, a_{84}, a_{87}, a_{88}, a_{89}\}$$

→ 47 liste complémentaire,

$$A_1 = \{a_4, a_7, a_9, a_{11}, a_{15}, a_{22}, a_{25}, a_{40}, a_{47}, a_{48}, a_{52}, a_{62}, a_{66}, a_{75}, a_{83}, a_{86}\}$$

→ 16 refusés (sauf les meilleurs).

Résultats de l'étape 1

Si on considère l'affectation optimiste :

- $A_1 \rightarrow A_2: \{a_7, a_{11}, a_{25}, a_{40}, a_{47}, a_{52}, a_{66}, a_{83}, a_{86}\}$.
- $A_2 \rightarrow A_3: \{a_{37}, a_{53}, a_{65}\}$.

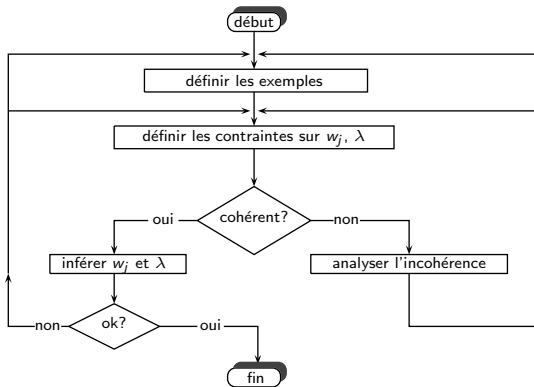
analyse de robustesse sommaire :

- $\sigma(a_i, b_2) = 0.735, (\lambda = 0.75)$ pour a_{53} ,
- $\sigma(a_i, b_2) = 0.765, (\lambda = 0.75)$ pour $a_{10}, a_{12}, a_{46}, a_{59}, a_{68}, a_{85}$,

Retour sur la définition des poids w_j

- Supposons que le comité d'admission ait du mal à fixer les poids des critères w_j ,
- *Electre Tri Assistant* permet d'induire les poids à partir d'exemple d'affectation (historique, exemples fictifs, ...),
- Utilisation de l'Assistant:
 - Définir des exemples d'affectation (et éventuellement des contraintes sur les poids),
 - Utiliser l'*Assistant* pour obtenir un jeu de poids,
 - S'arrêter si le jeu de poids est acceptable,
 - Sinon modifier les exemples d'affectation et/ou les contraintes sur les poids, et recalculer les poids
 - Procéder ainsi jusqu'à obtenir un jeu de poids satisfaisant.

Processus d'inférence des poids



- 1 Introduction
- 2 Exemple illustratif : Procédure d'admission
- 3 Étape 1 : utilisation d'Electre Tri
- 4 Étape 2 : utilisation d'Electre IS
- 5 Étape 3 : utilisation d'Electre III

Étape 2 : repêcher les meilleurs de A_1

- Objectif : sélectionner les meilleurs candidats "refusés" et les considérer pour constituer la liste complémentaire,
- Paramètre d'Electre IS :
 - seuils de discrimination $(p_j(b_h), q_j(b_h))$,

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
q_j	0	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0	0
p_j	1	1	1	1	0	0	0	0	0

- coefficients d'importance des critères w_j , $\lambda=0.75$.

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
w_1	3	3	2	2	2	1	1	1	2

- seuils de veto $v_j(b_h)$

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
v_j	5	10	10	10	4	3	3	4	3

Résultats de l'étape 2

- on sélectionne les candidats du noyau N
($\forall a \in A \setminus N, \exists b \in N : bSa$ et $\neg(a_iSa_j)$, $\forall a_i, a_j \in N$) dans le graphe réduit,
- Le noyau contient 3 sommets du graphe réduit:
 - deux sommets initiaux a_{52} et a_{66} ,
 - un sommet intermédiaire C_1 (circuit comprenant a_{62} et a_{83}).
- on “repêche” a_{52} et a_{66} pour les considérer dans la définition de la liste d'attente.

- 1 Introduction
- 2 Exemple illustratif : Procédure d'admission
- 3 Étape 1 : utilisation d'Electre Tri
- 4 Étape 2 : utilisation d'Electre IS
- 5 Étape 3 : utilisation d'Electre III

Étape 3 : constitution de la liste d'attente

- Objectif : classer les candidats de $A_2 \cup A'_1$ pour constituer la liste complémentaire,
- Utilisation d'Electre III avec les paramètres suivants :
 - seuils de discrimination $(p_j(b_h), q_j(b_h))$,

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
q_j	0	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0	0
p_j	1	1	1	1	0	0	0	0	0

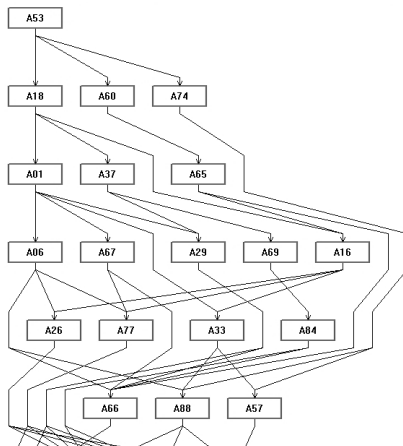
- coefficients d'importance des critères w_j , $\lambda=0.75$.

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
w_1	3	3	2	2	2	1	1	1	2

- seuils de veto

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9
v_j	5	10	10	10	4	3	3	4	3

Résultats de l'étape 3



Pre-ordre partiel résultat (incomplet)

Constitution de la liste d'attente

- le rangement des candidats issu d'Electre III est un pré-ordre **partiel**,
- ... pas totalement compatible avec la définition d'une liste complémentaire : (ordre **total**),
- on peut utiliser le pré-ordre médian (classement lié à la moyenne des rangs dans les deux distillations) **pré-ordre total** et arbitrer sur les ex-aequos,
- Liste complémentaire : $a_{53} \succ a_{18} \succ a_{60} \succ a_{74} \succ a_1 \succ a_{65} \succ a_{37} \succ a_6 \succ a_{16} \succ a_{67} \succ a_{29} \succ a_{69} \succ a_{26} \succ a_{77} \succ a_{33} \succ a_{84} \succ a_{88} \succ a_{57} \succ a_{66} \succ a_2 \succ \dots$
- d'où $a_{53}, a_{18}, a_{60} \in A_3$ (accepté) et Liste d'attente : $a_{53} \succ a_{18} \succ a_{60} \succ a_{74} \succ a_1 \succ a_{65} \succ a_{37} \succ a_6 \succ a_{16} \succ a_{67} \succ a_{29} \succ a_{69} \succ a_{26} \succ a_{77} \succ a_{33} \succ a_{84} \succ a_{88} \succ a_{57} \succ a_{66} \succ a_2 \succ \dots$

Remarque sur l'étape 3

- le candidat classé premier dans le rangement a_{53} correspond à une affectation en A_2 peu robuste ($A_2 \rightarrow A_3, \sigma(a_{53}, b_2) = 0.735$),
- les 2 candidats reprêchés (a_{52} et a_{66}) sont respectivement en fin et milieu de classement.

Conclusion

- Cette procédure de sélection illustre comment mettre en pratique les méthodes de surclassement,
- Utilisation successive des trois méthodes : Electre Tri, Electre IS et Electre III,
- Aspects importants :
 - structuration du problème (découpage en 3 phases),
 - construction des critères,
 - élicitation des préférences du décideur,
 - analyse de robustesse/sensibilité (prise en compte de l'imprécision liée aux données).